МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до самостійного вивчення курсу
«**МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ**»
(для студентів 2 і 3 курсів спеціальностей
7.050107 „Економіка підприємства”,
7.050106 „Облік і аудит” ФПО та ЗН)

Харків 2006

Методичні вказівки до самостійного вивчення курсу «Математичне програмування» (для студентів 2 і 3 курсів спеціальностей 7.050107 „Економіка підприємства”, 7.050106 „Облік і аудит” , ФПО та ЗН)
Укл.: Воронкова Т.Б., Воронков О.О., Охріменко В.М.
Харків: – ХНАМГ, 2006. – 58 с.

Укладачі : ст.викл. Т.Б. Воронкова,
доц. В.М.Охріменко,
ас. О.О.Воронков

Рекомендовано кафедрою інформаційних систем і технологій в міському господарстві, протокол № 30 від 30.06.06 р.

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Курс «Математичне програмування» відповідно до навчальної програми вивчається в 5 семестрі студентами 3-го курсу. Обсяг самостійної роботи студента, який навчається за заочною формою, становить 92 години. У цих методичних вказівках для кожної теми зазначено обсяг витрат часу на вивчення, що відповідає програмі курсу. Наприкінці методичних вказівок наведено список основних і додаткових підручників, які рекомендується використовувати. Кожна тема супроводжується посиланнями на відповідні їй сторінки підручників.

Після вивчення теоретичного матеріалу треба дати відповіді на контрольні запитання з теми, а також вирішити задачі, пропоновані для самостійного розв'язання. Для полегшення роботи перед задачею для самостійного розв'язання наведено розв'язання аналогічних задач.

Особливу увагу слід приділити розділу «Лінійне програмування». Знання й навички, отримані при вивченні цієї теми, є основою для вивчення наступних, більш складних тем курсу.

ВСТУП

Прийняття рішень відіграє велику роль у всіх сферах людської діяльності. Для постановки задачі ухвалення рішення необхідно мати дві умови: наявність вибору й наявність принципу, на підставі якого здійснюється вибір варіанта рішення. На ранніх етапах розвитку суспільства доступний обсяг інформації, що використовувалася для прийняття рішень, був невеликий. Тому оптимальне в певному смислі рішення приймалося на підставі інтуїції і досвіду, тобто принципом ухвалення рішення був **вольовий вибір**. Вольовий вибір часто використовується і сьогодні як єдино можливий при відсутності формалізованих моделей.

Із зростанням обсягу інформації про досліджуване явище для ухвалення оптимального рішення став використовуватися ряд прямих розрахунків. Так відбувалося, наприклад, створення календарних планів роботи промислових підприємств. Розрахунок дає обґрунтування прийнятому рішенню, дозволяє порівнювати рішення за ефективністю. Для порівняння різних варіантів рішення за ефективністю завжди потрібна деяка ознака, що називається **критерієм ефективності**. **Критеріальний вибір** полягає у прийнятті певного критерію і порівнянні можливих варіантів за цим критерієм. Варіант, для якого прийнятий критерій приймає найкраще значення, називають **оптимальним**, а задачу ухвалення найкращого рішення – задачею оптимізації.

На сучасному підприємстві обсяг вхідної інформації дуже великий, його обробка з метою ухвалення певного рішення неможлива без застосування сучасних електронних обчислювальних машин. Ще більші труднощі виникають у зв'язку із задачею про ухвалення **найкращого** рішення.

Займаючись розробкою та реалізацією стратегічних і тактичних планів, економіст шукає й реалізує ефективні способи досягнення заданих результатів діяльності підприємства. Практичні задачі прийняття рішень подібні між собою за постановкою і вирішуються подібними методами. До них належать, наприклад, організація виробництва і постачання, експлуатація транспорту, розміщення кадрів та ін. Зауважимо також, що діяльність підприємства завжди протікає в умовах обмежень, зокрема, за ресурсами, часом, кваліфікацією персоналу, попитом на вироблену продукцію і т.д.

Протягом трьох десятиліть у розвинутих країнах широко застосовуються **системи підтримки прийняття рішень** (СППР), які в даний час інтенсивно впроваджуються в нашій країні. СППР, крім програмного забезпечення, містять у собі банк економіко-математичних методів і моделей. Щоб ефективно застосовувати СППР, треба володіти методами математичного моделювання, вміти будувати економіко-математичні моделі, знати методи оптимізації економічних процесів і явищ. Все це вивчається у дисциплінах економіко-математичного циклу, включаючи математичне програмування, і дає фахівцеві можливості швидко й кваліфіковано приймати ефективні рішення.

Тема 1. ПРЕДМЕТ, ОСОБЛИВОСТІ Й СФЕРИ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ. КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ (2 години).

Предмет і завдання курсу. Задачі економічного вибору. Сутність однокритеріальной оптимізації.

Економічна й математична постановка оптимізаційних задач. Вибір критерію оптимізації та обмежень задачі.

Класифікація моделей і методів розв'язання задач математичного програмування.

Література: [1] с. 7-14; [2] с. 4-11; [4] с. 21-33.

Контрольні запитання

1. Предмет і зміст курсу "Математичне програмування", у чому особливості задач?
2. Сформулюйте задачу математичного програмування в найбільш загальному вигляді.
3. Які прийнято виділяти загальні етапи в розв'язанні задач математичного програмування?
4. Чому до задач математичного програмування не застосовують класичні методи пошуку умовного екстремуму функції?
5. Що являє собою цільова функція задачі МП?

Тема 2. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ (8 годин).

Економічна й математична постановка задач лінійного програмування (ЛП).

Визначення множини припустимих планів задачі ЛП. Геометрична інтерпретація множини припустимих планів задачі ЛП.

Цільова функція задачі ЛП.

Оптимальний план задачі ЛП.

Канонічна форма лінійної оптимізаційної моделі.

Симплекс-метод. Інші методи розв'язання задач ЛП.

Література: [1] с. 18-69; [2] с. 29-55; [4] с. 95-126.

Контрольні запитання

1.Запишіть загальну математичну модель задачі лінійного програмування.

2.Як звести задачу лінійного програмування до канонічної форми?

3.Які форми використовують для запису задач лінійного програмування?

4.Поясніть на прикладі геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування.

5. Яке рішення задачі лінійного програмування називається припустимим?

6. Поясніть, яка область рішень називається областю припустимих планів.

7. Який план називається опорним?

8. Який опорний план називається невиродженим?

9.Сформулюйте основні аналітичні властивості рішень задачі лінійного програмування.

10.Які задачі можна вирішувати графічним методом?

11.При яких умовах задача лінійного програмування з необмеженою областю припустимих планів має рішення?

12.Суть алгоритму графічного методу.

13.Для розв'язання яких математичних задач застосовується симплексний метод?

14.Суть алгоритму симплексного методу.

15.Сформулюйте умови оптимальності вирішення задачі симплексним методом.

16.Як вибрати напрямний вектор-стовпець?

17.Як вибрати розв'язний елемент?

18.Суть методу Жордана-Гаусса.

19.Суть методу штучного базису.

Приклад 1. Власні кошти банку разом з депозитами становлять 100 млн.грн. Не менше 35 млн.грн. з них повинні бути розміщені в кредитах, прибутковість яких становить 15%. Кредити є неліквідними активами банку, тому що у випадку непередбаченої потреби в готівці обернути їх у гроші без істотних втрат неможливо. Інша справа - цінні папери, особливо державні. Їх можна в будь-який момент продати, діставши деякий прибуток або, у всякому разі, без великого збитку. Тому існує правило, відповідно до якого комерційні банки повинні купувати в певній пропорції ліквідні активи - цінні папери, щоб компенсувати неліквідність кредитів. Нехай у цьому разі цінні папери повинні становити не менше 30% коштів, розміщених у кредитах і цінних паперах, а їхня прибутковість становить 10%.

Скласти економіко-математичну модель задачі, що дозволяє сформувати оптимальний пакет активів банку, тобто встановити, яку частину власних коштів банку треба розмістити в кредитах, а яку вкласти в цінні папери для того, щоб дістати максимальний прибуток. Вирішити задачу графічним способом.

Розв'язання

Завдання полягає у визначенні найвигіднішого для банку розміщення власних коштів і депозитів у кредитах і цінних паперах, при якому банк отримає за розглянутий проміжок часу найбільший прибуток. Позначимо x_1 кошти, розміщені в кредитах, x_2 – кошти, вкладені в цінні папери.

Значення x_1 і x_2, насамперед, повинні задовольняти балансовому обмеженню, що враховує можливості банку:

$$x_1+x_2 \leq 100.$$

Обмеження по кредитах виразиться записом

$$x_1 \geq 35.$$

Цінні папери повинні становити не менше 30% коштів банку. Ця вимога виразиться обмеженням

$$x_2 \geq 0,3*(x_1+x_2).$$

За змістом змінних x_1 і x_2 вони повинні бути невід’ємними:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Метою задачі є отримання найбільшого прибутку. З урахуванням прибутковості прибуток від x_1 млн. грн., розміщених у кредитах складе $0,15x_1$, а від x_2 млн. грн., вкладених у цінні папери, дорівнюватиме $0,1x_2$ млн. грн. Таким чином, цільова функція запишеться у вигляді

$$L = 0,15x_1 + 0,1x_2 \rightarrow \max.$$

Отримана математична модель виглядає так:

знайти такі x_1 і x_2, що перетворюють у максимум цільову функцію

$$L = 0,15x_1 + 0,1x_2 \rightarrow \max$$

і задовольняють обмеженням

$$x_1+x_2 \leq 100.$$

$$x_1 \geq 35.$$

$$x_2 \geq 0,3*(x_1+x_2)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Побудуємо область припустимих розв'язань.

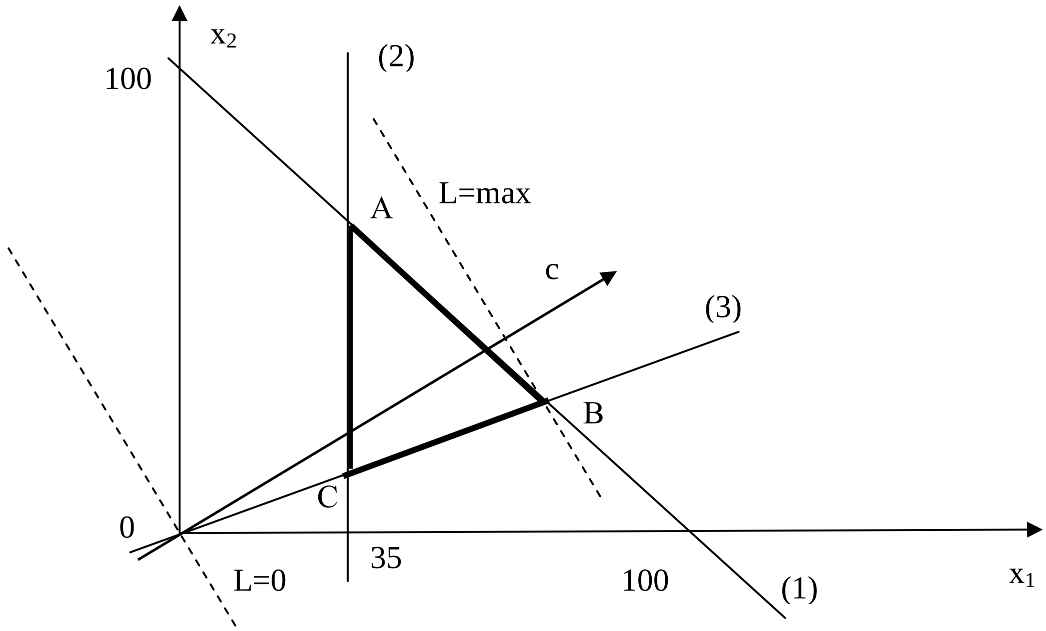

Рис. 1.

Перше обмеження – пряма, що проходить через точки з координатами (0,100) і (100,0). Друге обмеження – пряма x_1 = 35. Третє обмеження - пряма, що проходить через точки з координатами (0,0) і, наприклад, (35,15). Область припустимих розв'язань - трикутник ABC. Побудуємо градієнт цільової функції, що вказує напрямок найшвидшого її зростання, вектор c=(0,15; 0,1). Опорна пряма L=0, що проходить через початок координат, перпендикулярна вектору c(0,15; 0,1). Переміщуючи опорну пряму в напрямку, зазначеному вектором c, знаходимо, що оптимальний план лежить у точці B. Для знаходження її координат вирішимо систему рівнянь:

$$x_1+x_2 = 100,$$

$$x_2 = 0,3*(x_1+x_2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 100 \\ x_2 = 0,3*(x_1+x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = 100 - x_1 \\ 100 - x_1 = 0,3*(x_1 + 100 - x_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 70 \\ x_2 = 30 \end{array}\right\}.$$

Таким чином, для одержання максимального прибутку банку необхідно розмістити в кредитах 70 млн.грн. і 30 млн.грн. вкласти в цінні папери. При цьому максимальний прибуток становитиме

$$L = 0,15*70 + 0,1*30 = 13,5 \text{ млн.грн.}$$

Приклад 2. На підприємстві є можливість випускати чотири види продукції $П_j$. При її виготовленні використовуються ресурси $Р_1$, $Р_2$ і $Р_3$. Розміри припустимих витрат ресурсів обмежені відповідно величинами 34, 16 і 22 одиниць. Видаток ресурсу $Р_i$ ($i = \overline{1,3}$) на одиницю продукції $П_j$ ($j = \overline{1,4}$) заданий матрицею

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Планова ціна одиниці продукції $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ відповідно дорівнює 18, 14, 15, 10 грош. од., а оптова ціна – 25, 17, 19, 12 грош. од. Скласти економіко-математичну модель задачі, що дозволяє знайти збалансований по ресурсах план випуску продукції, що забезпечує підприємству максимальний прибуток. Симплексним методом знайти оптимальний план випуску продукції за видами, дати змістовну відповідь, розкривши економічний зміст усіх змінних, які беруть участь у розв'язанні задачі.

Розв'язання

Позначимо x_1, x_2, x_3, x_4 кількість одиниць продукції відповідно $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, запланованої до випуску. Прибуток підприємства є різницею між його доходом і витратами. Визначимо величину прибутку для кожного виробу:

для $П_1$ 25-18=7 грош. од.

для $П_2$ 17-14=3 грош. од.

для $П_3$ 19-15=4 грош. од.

для $П_4$ 12-10=2 грош. од.

Тоді цільова функція виразиться в такий спосіб:

$$L = 7x_1+3x_2+4x_3+2x_4 \to \max.$$

Складемо обмеження, обумовлені видатком ресурсів:

$$2x_1+4x_2+1x_3+5x_4 \le 34$$

$$4x_1+1x_2+4x_3+1x_4 \le 16$$

$$2x_1+3x_2+1x_3+2x_4 \le 22$$

За змістом задачі змінні x_1, x_2, x_3, x_4 не можуть виражатися невід'ємними числами. Введемо обмеження

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Таким чином, модель задачі формулюється так:

знайти такі x_1, x_2, x_3, x_4, які перетворюють у максимум цільову функцію

$$L = 7x_1+3x_2+4x_3+2x_4 \rightarrow \max.$$

і задовольняють обмеженням

$$2x_1+4x_2+1x_3+5x_4 \leq 34$$

$$4x_1+1x_2+4x_3+1x_4 \leq 16$$

$$2x_1+3x_2+1x_3+2x_4 \leq 22$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Перш ніж вирішувати задачу лінійного програмування симплексним методом, її модель приводять до канонічної форми. Основною ознакою канонічної форми є запис обмежень задачі у вигляді рівностей. Щоб перетворити нерівності в еквівалентні рівняння, введемо в ліві частини нерівностей додаткові (балансові) невід'ємні змінні x_5, x_6, x_7, які за змістом є різницями між правими й лівими частинами нерівностей. У результаті модель буде записана у вигляді:

знайти такі x_j, які перетворюють у максимум функцію

$$L = 7x_1+3x_2+4x_3+2x_4 \rightarrow \max.$$

і задовольняють обмеженням

$$2x_1+4x_2+1x_3+5x_4+ x_5 \leq 34$$

$$4x_1+1x_2+4x_3+1x_4+ x_6 \leq 16$$

$$2x_1+3x_2+1x_3+2x_4+ x_7 \leq 22$$

$$x_j \geq 0.$$

Відзначимо також, що додаткові змінні x_5, x_6, x_7 мають цілком певний економічний зміст – це не використовувана при даному плані виробництва кількість сировини того або іншого виду (можливі залишки ресурсів P_1, P_2, P_3), їх ще називають резервами.

Аналізуючи канонічну модель, зазначимо, що кожна змінна x_5, x_6, x_7 входить тільки в одне з рівнянь системи. Ця обставина свідчить про те, що змінні x_5, x_6, x_7, є базисними, а інші x_1, x_2, x_3, x_4 – вільними.

Складемо симплекс-таблицю, що відповідає початковому опорному плану

$$x= (0, 0, 0, 0, 34, 16, 22)$$

при якому цільова функція L = 0.

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	7	3	4	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_5	0	34	2	4	1	5	1	0	0
A_6	0	16	4	1	4	1	0	1	0
A_7	0	22	2	3	1	2	0	0	1
L_j		0	0	0	0	0	0	0	0
Δ_j			-7	-3	-4	-2	0	0	0

Оскільки в рядку Δ_j є від’ємні елементи, план не є оптимальним. Перш ніж перейти до нового опорного плану, визначимо, який вектор треба вводити в базис в першу чергу. Для цього визначимо добутки $\Delta_j*\Theta_j$ і виберемо найбільший за абсолютною величиною.

$\Theta_1 = \min(34/2, 16/4, 22/2) = 4$

$\Theta_2 = \min(34/4, 16/1, 22/3) = 7{,}33$

$\Theta_3 = \min(34/1, 16/4, 22/1) = 4$

$\Theta_4 = \min(34/5, 16/1, 22/2) = 6{,}8$

$\Delta_1*\Theta_1 = -7*4 = -28$, $\Delta_2*\Theta_2 = -3*7{,}33 = -22$,

$\Delta_3*\Theta_3 = -4*4 = -16$, $\Delta_4*\Theta_4 = -2*6{,}8 = -13{,}6$.

Найбільшим за абсолютною величиною є $\Delta_1*\Theta_1 = -28$. Будемо вводити в базис вектор A_1, і виводити з базису вектор A_6.

Складемо нову симплекс-таблицю.

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	7	3	4	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	7	4	1	0,25	1	0,25	0	0,25	0
A_5	0	26	0	3,50	-1	4,50	1	-0,50	0
A_7	0	14	0	2,50	-1	1,50	0	-0,50	1
L_j		28	7	1,75	7	1,75	0	1,75	0
Δ_j			0	-1,25	3	-0,25	0	1,75	0

Отримано новий опорний план x= (4; 0; 0; 0; 26; 0; 14), при якому цільова функція L = 28, тобто стала більше.

Перевірка плану на оптимальність показує, що в рядку Δ_j є від'ємні елементи, тобто цей план також не є оптимальним. Визначимо, який вектор треба вводити в базис для переходу до нового опорного плану. Визначимо добутки $\Delta_j*\Theta_j$:

$\Theta_2 = \min(4*4, 26*2/7, 14*2/5) = 5{,}6$

$\Theta_4 = \min(4*4, 26*4/18, 14*4/6) = 5{,}78$

$\Delta_2*\Theta_2 = -1{,}25*5{,}6 = -7$, $\Delta_4*\Theta_4 = -1/4*5{,}78 = -1{,}445$. Будемо вводити в базис вектор A_2, а виводити з базису вектор A_7.

Складемо нову симплекс-таблицю

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	7	3	4	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	5,60	0	1	-0,40	0,60	0	-0,20	0,40
A_1	7	2,60	1	0	1,10	0,10	0	0,30	-0,10
A_5	0	6,40	0	0	0,40	2,40	1	0,20	-1,40
L_j		35,00	7	3	6,50	2,50	0	1,50	0,50
Δ_j			0	0	2,50	0,50	0	1,50	0,50

Отримано новий план x= (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), при якому значення цільової функції L = 35.

Перевірка отриманого плану на оптимальність показує, що всі $\Delta_j \geq 0$, отже план є оптимальним.

Відповідно до отриманого плану треба виготовити 2,6 од. продукції $П_1$ і 5,6 од. продукції $П_2$; продукцію $П_3$ і $П_4$ виготовляти не слід. При цьому підприємство дістане максимальний прибуток в розмірі 35 грош. од. Залишаться невикористаними 6,4 од. ресурсу $Р_1$, а ресурси $Р_2$ і $Р_3$ будуть витрачені цілком.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1. Для збереження здоров'я й працездатності людина повинна у добу споживати не менш 20 умовн. од. білків, не менш 40 умовн. од. жирів і не менш 88 умовн. од. вуглеводів. Для простоти припустимо, що є всього два види продуктів $П_1$ і $П_2$, вартість одиниці кожного з них дорівнює відповідно 6 і 10 грош. одиниць. Вміст названих живильних речовин у різних продуктах харчування не однаковий. Припустимо, що в одиниці продукту $П_1$ міститься 4 умовн. од. білків, 4 умовн. од. жирів і 4 умовн. од вуглеводів, а в одиниці продукту $П_2$ відповідно 1, 3 і 15 умовн. од. тих же живильних речовин. Потрібно скласти економіко-математичну модель задачі, що дозволяє сформувати з продуктів $П_1$ і $П_2$ добову дієту, що, з однієї сторони, містила б білків, жирів і вуглеводів не менш науково обґрунтованих норм і разом з тим вимагала б мінімальних витрат. Вирішити задачу графічним способом. (Відповідь: $x_1 = 7$, $x_2=4$).

Задача 2. Для виробництва трьох видів продуктів $П_1$, $П_2$, $П_3$ використовуються чотири види ресурсів P_1, P_2, P_3, P_4. Добовий видаток ресурсів на 1 кг кожного продукту і їхній денний запас наведені в таблиці.

Ресурси	Витрата ресурсу на 1 кг продукту			Запас, кг
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	
P_1	1	1,25	0,8	2500
P_2	0,4	0,25	0,5	1000
P_3	1	1,6	1,5	4000
P_4	0,4	0	0	800

Ціна 1 кг продукту $П_1$ становить 58 грн., продукту $П_2$ - 40 грн., продукту $П_3$ - 60 грн. Яку кількість продуктів кожного виду необхідно виробляти, щоб дохід від реалізації був максимальним? (Відповідь: x = (2000; 211,8; 294; 0; 0; 1220; 0), L*=142117,6).

Тема 3. ТЕОРІЯ ПОДВІЙНОСТІ Й ДВОЇСТІ ОЦІНКИ В АНАЛІЗІ РОЗВ'ЯЗАНЬ ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ (8 годин).

Пряма й двоїста задачі як пара сполучених задач ЛП.

Двоїсті оцінки й дефіцитність ресурсів у колі оптимального плану задачі ЛП.

Стійкість оптимальних планів прямої і двоїстої задач.

Основні теореми подвійності, їхній економічний зміст.

Післяоптимізаційний аналіз задач ЛП.

Література: [1] с. 72-75, 90-105;[2] с. 88-99; [4] с. 141-161.

Контрольні запитання

1. У чому сутність подвійності в лінійному програмуванні?
2. Запишіть просту економіко-математичну модель. Запишіть до неї двоїсту задачу. Дайте економічну інтерпретацію двоїстих оцінок.
3. Які взаємносполучені задачі називаються симетричними, а які - несиметричними? Чим вони відрізняються?
4. Скільки змінних і обмежень має двоїста задача залежно від прямої?
5. Сформулюйте першу теорему подвійності й поясніть її економічний зміст.
6. Сформулюйте другу теорему подвійності й поясніть її економічний зміст.
7. Сформулюйте третю теорему подвійності й поясніть її економічний зміст.
8. Сформулюйте правила побудови пари двоїстих задач.
9. Як за рішенням прямої задачі знайти рішення двоїстої?
10. Запишіть всі можливі види прямих і двоїстих задач.

Приклад 3. Використовуючи розв'язання прикладу 2 і відповідність між двоїстими змінними, знайти компоненти оптимального плану двоїстої задачі – двоїсті оцінки u_i.

Розв'язання

Для складання двоїстої задачі скористуємося умовою прямої задачі й властивостями пари сполучених задач.

Пряма задача була сформульована в такий спосіб: знайти такі x_j, які перетворюють у максимум функцію

$$L = 7x_1+3x_2+4x_3+2x_4 \rightarrow max$$

і задовольняють обмеженням

$$2x_1+4x_2+1x_3+5x_4+ x_5\leq 34$$

$$4x_1+1x_2+4x_3+1x_4+ x_6\leq 16$$

$$2x_1+3x_2+1x_3+2x_4+ x_7\leq 22$$

$$x_j\geq 0.$$

Двоїста задача формулюється в такий спосіб: знайти такі u_1, u_2, u_3, які перетворюють у мінімум цільову функцію

$$L' = 34u_1+16u_2+22u_3 \rightarrow min$$

і задовольняють обмеженням

$$2u_1 + 4u_2 + 2u_3 \geq 7$$

$$4u_1 + u_2 + 3u_3 \geq 3$$

$$u_1 + 4u_2 + u_3 \geq 4$$

$$5u_1 + u_2 + 2u_3 \geq 2$$

$$u_i \geq 0 \ (i = 1,3).$$

З теорем подвійності виходить, що якщо вирішена одна з пари двоїстих задач, то одночасно знайдене й розв'язання іншої задачі. Компоненти оптимального плану цієї задачі перебувають у рядку цільової функції останньої симплекс-таблиці вирішеної задачі. Визначити їх можна, використовуючи відповідність між змінними двоїстих задач. Щоб установити цю відповідність, перетворимо обмеження двоїстої задачі в еквівалентні рівняння, віднімаючи з лівих частин додаткові невід'ємні змінні.

Отримаємо

$$
\begin{aligned}
&2u_1 + 4u_2 + 2u_3 - u_4 = 7\\
&4u_1 + u_2 + 3u_3 - u_5 = 3\\
&u_1 + 4u_2 + u_3 - u_6 = 4\\
&5u_1 + u_2 + 2u_3 - u_7 = 2\\
&u_i \geq 0 \ (i = 1,7).
\end{aligned}
$$

У цьому записі змінні u_4, u_5, u_6, і u_7 є базисними, а u_1, u_2, u_3 – вільними. У прямій задачі змінні x_1, x_2, x_3 і x_4 є вільними , а x_5, x_6, x_7 - базисними. Відповідність встановлюють, зіставляючи базисним змінним однієї задачі вільні змінні іншої і навпаки.

$$
\begin{matrix} \overbrace{x_1 \ \ x_2 \ \ x_3 \ \ x_4}^{\textit{вільні}} \\ \Updownarrow \ \ \Updownarrow \ \ \Updownarrow \ \ \Updownarrow \\ u_4 \ \ u_5 \ \ u_6 \ \ u_7 \\ \textit{базисні} \end{matrix}
\qquad\qquad
\begin{matrix} \overbrace{x_5 \ \ x_6 \ \ x_7}^{\textit{базисні}} \\ \Updownarrow \ \ \Updownarrow \ \ \Updownarrow \\ u_1 \ \ u_2 \ \ u_3 \\ \textit{вільні} \end{matrix}
$$

Як видно, змінна u_1 зв'язана із змінною x_5 (тому їх називають двоїстими змінними), в останній симплексі-таблиці, що містить оптимальний план, x_5 перебуває в базисі, значить двоїста їй змінна u_1 на цьому етапі розрахунків є вільною і як вільна змінна дорівнює нулю (у будь-якій двоїстій парі завжди одна змінна базисна, а інша – вільна). Отже, u_1 =0. Далі, u_2 відповідає x_6 . Остання симплекс-таблиця має вигляд

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	7	3	4	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	5,60	0	1	-0,40	0,60	0	-0,20	0,40
A_1	7	2,60	1	0	1,10	0,10	0	0,30	-0,10
A_5	0	6,40	0	0	0,40	2,40	1	0,20	-1,40
L_j		35,00	7	3	6,50	2,50	0	1,50	0,50
Δ_j			0	0	2,50	0,50	0	1,50	0,50

Оптимальний план x= (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), при якому значення цільової функції L = 35.

У цій симплекс-таблиці в стовпці вектора A_6 у рядку L_6 перебуває елемент 1,5, отже u_2= 1,5. У такий же спосіб можна визначити, що u_3= 0,5.
З теорем подвійності також виходить, що значення цільових функцій розв'язних двоїстих задач рівні між собою, тому L' = 35.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3. Використовуючи розв'язання задачі 2 і відповідність між двоїстими змінними, знайти компоненти оптимального плану двоїстої задачі – двоїсті оцінки u_i. (Відповідь: u*=(11,8; 101,18; 0; 14,4)).

Задача 4. Для виготовлення виробів А, В, С підприємство використовує три різних види сировини. Норми витрати сировини на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу А, В і С, а також загальна кількість сировини кожного виду, що може бути використана підприємством, наведені в таблиці.

Вид сировини	Норми витрат сировини			Запас сировини
	A	B	C	
S_1	18	15	12	360
S_2	6	4	8	192
S_3	5	3	3	180
Ціна одного виробу, грн.	9	10	16	

Скласти план виготовлення виробів, при якому загальна вартість всієї виробленої підприємством продукції є максимальною. Скласти двоїсту задачу й знайти її оптимальний план. (Відповідь: x*=(0; 8; 20; 0; 0; 96), L*=400 грн. u*=(0,22; 1,67; 0)).

Тема 4. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ (12 годин).

Аналіз рішень лінійних економіко-математичних моделей.

Оцінка рентабельності виробленої продукції.

Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів.

Аналіз коефіцієнтів цільової функції.

Аналіз коефіцієнтів технологічної матриці для базисних і вільних змінних.

Приклади практичного застосування двоїстих оцінок в аналізі економічних задач.

Література: [1] с. 72-75, 90-105;[2] с. 101-116; [4] с. 171-190.

Контрольні запитання

1.Дайте економічну інтерпретацію прямої й двоїстої задач.

2. Як визначити, що ресурс є дефіцитним (недефіцитним)?

3. Як визначити, що продукція є рентабельною (нерентабельною)?

4. Як впливає на оптимальний план введення додаткового обмеження?

5. Як впливає на оптимальний план введення нової змінної?

6. Як визначити статус ресурсів прямої задачі й інтервали стійкості двоїстих оцінок щодо зміни запасів дефіцитних ресурсів?

7. Як визначити план виробництва продукції й зміну прибутку підприємства, якщо збільшити (зменшити) обсяг ресурсів?

8. Як визначити рентабельність кожного виду продукції, виготовленої на підприємстві?

9. Як розрахувати інтервали можливої зміни ціни на одиницю кожного виду продукції?

10.Як виробник повинен змінити план виробництва продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних з надвиробництвом відповідного виду продукції?

Приклад 4. Зробимо аналіз оптимальних планів задачі, отриманих у прикладах 2 і 3. Остання симплекс-таблиця, що містить оптимальний план, має вигляд:

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	7	3	4	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_2	3	5,60	0	1	-0,40	0,60	0	-0,20	0,40
A_1	7	2,60	1	0	1,10	0,10	0	0,30	-0,10
A_5	0	6,40	0	0	0,40	2,40	1	0,20	-1,40
L_j		35,00	7	3	6,50	2,50	0	1,50	0,50
Δ_j			0	0	2,50	0,50	0	1,50	0,50

Оптимальний план x*= (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), при якому значення цільової функції L* = 35.

Оптимальний план двоїстої задачі u*=(0; 1,5; 0,5).

Розв'язання

З останньої симплекс-таблиці прямої задачі маємо:

x* = (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0), max L = 35;

u*=(0; 1,5; 0,5)

min L’ = 35 = max L.

Оптимальний план прямої задачі передбачає виробництво тільки двох видів продукції $П_1$ і $П_2$ у кількості відповідно 2,6 і 5,6 од. Випуск продукції $П_3$ і $П_4$ не передбачається ($x_3 = x_4 = 0$). Додаткові змінні x_5, x_6, x_7 характеризують залишок (невикористану частину) ресурсів відповідно P_1, P_2 і P_3. Оскільки $x_5 = 6,4$, перший ресурс використовується у процесі виробництва продукції не повністю, а другий і третій ресурси - повністю ($x_6 = x_7 = 0$). При такому оптимальному плані виробництва продукції і використанні ресурсів підприємство отримує найбільший прибуток у розмірі 35 грош. од.

План двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, використовуваних у виробництві. Так, $u_2 = 1,5$ і $u_3 = 0,5$ відмінні від нуля, а ресурси P_2 і P_3 використовуються цілком. Двоїста оцінка $u_1 = 0$ і відповідний вид ресурсу не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Така оптимальна система оцінок дає найменшу загальну вартість всіх ресурсів, використовуваних на підприємстві: min L' = 35 грош. од.

Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами. Перший - підстановкою x* у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як строга рівність, то відповідний ресурс є дефіцитним, у противному разі - недефіцитним.

$2*2,6+4*5,6+1*0+5*0 = 27,6 < 34$ (ресурс 1 недефіцитний);

$4*2,6+1*5,6+4*0+1*0 = 16$ (ресурс 2 дефіцитний);

$2*2,6+3*5,6+1*0+2*0 = 22$ (ресурс 3 дефіцитний).

Другий спосіб - за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс є дефіцитним, а якщо відмінна від нуля - ресурс недефіцитний.

Третій спосіб - за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $u_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів i-го ресурсу приводить до відповідної зміни прибутку підприємства, тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо $u_i = 0$, то й ресурс недефіцитний. Так,

$u_1=0$ (ресурс 1 недефіцитний);

$u_2 = 1,5$ (ресурс 2 дефіцитний);

$u_3 = 0,5$ (ресурс 3 дефіцитний).

Таким чином, якщо запас другого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ($b_2 = 16 + 1 = 17$), то цільова функція max L збільшиться при інших незмінних умовах на $u_2 = 1,5$ грош. од. і буде дорівнювати max L = 36,5 грош. од. Але за рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться прибуток підприємства? Інформацію про це дають елементи стовпця «A_6» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці $u_2 = 1,5$. У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_1 збільшиться на 0,3, змінної x_2 - зменшиться на 0,2, а витрати сировини P_2 зростуть на 0,2. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

$$x^* = (2{,}9;\ 5{,}4;\ 0;\ 0;\ 6{,}6;\ 0;\ 0).$$

Таким чином, збільшення запасу другого дефіцитного ресурсу при інших незмінних умовах спричинить зростання випуску продукції $П_1$ і зниження виробництва продукції $П_2$, а обсяг використання ресурсу P_1 збільшиться. При такому плані виробництва максимальний прибуток підприємства буде

$$\max L = 7*2{,}9 + 3*5{,}4 + 4*0 + 2*0 = 36{,}5,$$

тобто зросте на $u_2 = 1{,}5$.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу P_3, при інших незмінних умовах, збільшити на одну умовну одиницю ($b_3 = 22 + 1 = 23$). Аналогічно міркуючи, скористаємося елементами стовпчика «A_7» останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці $u_3 = 0{,}5$. Запишемо новий оптимальний план:

$$x^* = (2{,}5;\ 6;\ 0;\ 0;\ 5;\ 0;\ 0),$$

$$\max L^* = 7*2{,}5 + 3*6 + 4*0 + 2*0 = 35{,}5.$$

Таким чином, прибуток підприємства збільшиться на 0,5 грошових одиниць за рахунок збільшення виробництва продукції $П_2$ на 0,4 одиниці й зменшення випуску продукції $П_1$ на 0,1 одиниці. При цьому обсяг використання ресурсу P_1 зменшиться на 1,4 од.

У результаті проведеного аналізу виникає питання, чи будуть зберігатися встановлені співвідношення, якщо запас дефіцитного ресурсу змінити не на одиницю, а, наприклад, на 10 умовн. од.? Щоб однозначно відповісти на це запитання, необхідно розрахувати інтервали можливої зміни обсягів дефіцитних ресурсів, у межах яких двоїсті оцінки u_i, залишаються на рівні оптимальних значень.

Приріст (зміну) запасу ресурсу P_2 позначимо Δb_2. Тоді якщо $b'_2 = b_2 + {}+\Delta b_2$, то новий оптимальний план

$$x^* = (2{,}6+0{,}3\Delta b_2;\ 5{,}6-0{,}2\Delta b_2;\ 0;\ 0;\ 6{,}4+0{,}2\Delta b_2;\ 0;\ 0).$$

Єдина вимога, яку можна висунути до нових оптимальних значень, - це умова невід'ємності, тобто

$$\begin{cases} 2,6+0,3\Delta b_2 \ge 0 \\ 5,6-0,2\Delta b_2 \ge 0 \\ 6,4+0,2\Delta b_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_2 \ge -8,67 \\ \Delta b_2 \le 28 \\ \Delta b_2 \ge -32 \end{cases}$$

$$-8,67 \le \Delta b_2 \le 28.$$

Це означає, що коли запас ресурсу P_2 збільшиться на 28 од. або зменшиться на 8,67 од., то оптимальною двоїстою оцінкою ресурсу P_2 залишиться $u_2 = 1,5$. Таким чином, запас ресурсу P_2 може змінюватися в межах

$$16-8,67 \le b_2+\Delta b_2 \le 16 + 28,$$

$$7,33 \le b_2 \le 44.$$

Відповідно до цього максимально можливий прибуток підприємства буде перебувати в межах

$$35-8,67*0,3 \le L_{max} \le 35 + 28*0,2,$$

$$32,4 \le L_{max} \le 40,6.$$

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки $u_3 = 1,5$ дефіцитного ресурсу P_3:

$$\begin{cases} 2,6-0,1\Delta b_3 \ge 0 \\ 5,6+0,4\Delta b_3 \ge 0 \\ 6,4-1,4\Delta b_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \le 26 \\ \Delta b_3 \ge -14 \\ \Delta b_3 \le 4,57 \end{cases}$$

$$-14 \le \Delta b_3 \le 4,57.$$

$$8 \le b_3 \le 26,57.$$

Таким чином, якщо запас ресурсу P_3 збільшиться на 4,57 од. або зменшиться на 14 од., то двоїста оцінка $u_3 = 1,5$ цього ресурсу залишиться оптимальною.

Зазначимо, що вказані інтервали стосуються тільки випадків, коли змінюється тільки один ресурс, а запаси всіх інших фіксовані, тобто при інших незмінних умовах. У випадку одночасної зміни обсягів всіх або декількох ресурсів підхід до визначення нового оптимального плану дещо інший.

Оцінку рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві, виконують шляхом аналізу двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі, що характеризують кожен вид продукції.

Підставимо u* у систему обмежень двоїстої задачі. Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина) перевищує ціну цієї продукції (права частина), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як строга рівність, то продукція рентабельна:

$2*0 + 4*1,5 + 2*0,5 = 7$ (продукція $П_1$ рентабельна);

$4*0 + 1*1,5 + 3*0,5 = 3$ (продукція $П_2$ рентабельна);

$1*0 + 4*1,5 + 1*0,5 = 6,5 > 4$ (продукція $П_3$ нерентабельна);

$5*0 + 1,5 + 2*0,5 = 2,5 > 2$ (продукція $П_4$ нерентабельна).

Аналогічні результати можна отримати, проаналізувавши двоїсті оцінки додаткових змінних, значення яких показують, на скільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $u_i \neq 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Додаткові змінні двоїстої задачі розташовуються в індексному рядку останньої симплекс-таблиці в стовпцях «A_1»-«A_4». Їхні оптимальні значення $u_4 = 0$; $u_5 = 0$; $u_6 = 2,5$; $u_7 = 0,5$. Тому продукція $П_3$ і $П_4$ нерентабельна, а продукція $П_1$ і $П_2$ - рентабельна.

Під впливом різних обставин ціна одиниці продукції на підприємстві може змінюватися (збільшуватися або зменшуватися). Тому завжди цікаво знати, в межах яких змін ціни продукції кожного виду оптимальний план її виробництва залишається той же самий:

$$x^* = (2,6; 5,6; 0; 0; 6,4; 0; 0).$$

Для визначення інтервалів зміни коефіцієнтів цільової функції скористаємося тим, що при цьому симплекс-таблиця, що відповідає оптимальному плану, зберігає свій вигляд за винятком елементів індексного рядка. Нові оцінки (L_j - C_j) повинні задовольняти умові оптимальності задачі максимізації, тобто бути невід'ємними.

Зміну коефіцієнта c_3 позначимо Δc_3. Оскільки x_3 - небазисна змінна, то в симплекс-таблиці зміниться лише відповідна оцінка L_3-c_3:

$$(L_3 - c_3) = 3 * (-0,4) + 7 * 1,1 + 0 * 0,4 - (4 + \Delta c_3) = 2,5 - \Delta c_3.$$

За умови $L_3 - c_3 \geq 0$ одержимо нерівність $2,5 - \Delta c_3 \geq 0$, тобто $\Delta c_3 \leq 2,5$. Це означає, що коли ціна одиниці продукції $П_3$, при інших незмінних умовах, зросте не більше ніж на 2,5 грош. од., то оптимальним планом виробництва продукції на підприємстві залишиться $x^* = (2,6;\ 5,6;\ 0;\ 0;\ 6,4;\ 0;\ 0)$. Тільки максимальний прибуток зміниться на $\max \Delta L = \Delta c_3 x_3$.

Аналогічно розраховуємо інтервал зміни коефіцієнта Δc_4:

$$(L_4 - c_4) = 3 * 0,6 + 7 * 0,1 + 0 * 2,4 - (2 + \Delta c_4) = 0,5 - \Delta c_4;$$

$$\Delta c_4 \leq 0,5.$$

З ростом ціни одиниці продукції $П_4$ на 0,5 грош. од., при інших незмінних умовах, оптимальний план виробництва продукції не зміниться, а $\max \Delta L = \Delta c_4 x_4$.

Дещо складніше розраховується інтервал зміни коефіцієнтів для базисних змінних.

Задачі для самостійного рішення

Задача 5. Зробити аналіз оптимальних планів задачі 2.

Задача 6. Зробити аналіз оптимальних планів задачі 3.

Тема 5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА (Т З). ПОСТАНОВКА, МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ І АНАЛІЗУ (8 годин).

Економічна й математична постановка Т З.

Умови існування вирішення Т З.

Методи побудови опорного плану. Випадок виродження.

Двоїста задача. Умова оптимальності.

Методи розв'язання Т З.

Транспортна задача за критерієм часу.

Двохетапна ТЗ і методи її розв'язання.

Сіткове розв'язання ТЗ.

Література: [1] с. 118-138;[2] с. 134-169; [4] с. 193-216.

Контрольні запитання

1.Дайте економічну й математичну постановку транспортної задачі.

2. Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійного програмування?

3.Сформулюйте необхідну й достатню умову існування вирішення транспортної задачі.

4.Властивості опорних планів транспортної задачі.

5.Чим відрізняється відкрита транспортна задача від закритої?

6.Як перетворити відкриту транспортну задачу на закриту?

7.Які Ви знаєте методи побудови опорного плану?

8.Побудуйте невироджений опорний план методами північно-західного кута, мінімального елемента й подвійної переваги для наступної транспортної задачі:

$$a_i = 50,70,90; \quad b_j; = 70,65,70,\ 75.$$

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 4\,7\,9\,7 \\ 2\,4\,5\,8 \\ 6\,3\,9\,5 \end{bmatrix}$$

Порівняйте ці плани.

9. Що означає «виродження» опорного плану? Як від нього позбутися?

10.Назвіть етапи розв'язання Т З методом потенціалів.

11.Як обчислюють потенціали?

12.Умова оптимальності транспортної задачі.

13.Дайте економічну й математичну постановку двохетапної транспортної задачі.

14.Назвіть особливості розв'язання транспортних задач з обмеженнями виду $\overline{d_{ij}} \le x_{ij} \le d_{ij}$.

Приклад 5. На ділянках $У_1$, $У_2$, $У_3$ площею 300, 500 і 400 га відповідно можуть вирощуватися сільськогосподарські культури $К_1$, $К_2$, $К_3$ і $К_4$. Планове завдання передбачає збір цих культур у кількості відповідно по 6000, 1500, 225 і 1250 тонн. Матриця

$$\begin{bmatrix} 20 & 50 & 24 & 10 \\ 25 & 40 & 10 & 20 \\ 30 & 15 & 20 & 15 \end{bmatrix}$$

характеризує прибуток у грош. один. від реалізації 1 тонни при вирощуванні на ділянці $У_i$ $(i=1,3)$ культури $К_j$ $(j=1,4)$. Урожайність різних культур не залежить від ділянки посіву й становить 20, 30, 15 і 50 ц/га. Скласти економіко-математичну модель задачі, користуючись якою можна знайти план посіву сільськогосподарських культур, який максимізує прибуток. Методом потенціалів знайти такий розподіл культур $К_1$, $К_2$, $К_3$ і $К_4$ по ділянках $У_1$, $У_2$ і $У_3$, при якому прибуток досягає найбільшого значення. Знайти оптимальний розподіл культур по ділянках при додатковій умові, що в майбутньому році використання ділянки $У_3$ під культуру $К_1$ агрономічною службою не рекомендовано. Встановити, на скільки зміниться величина максимального прибутку при дотриманні додаткового обмеження.

Розв'язання

Позначимо x_{ij} площу (у га), що передбачається зайняти на ділянці $У_i$ $(i=\overline{1,3})$ культурою $К_j$ $(j=\overline{1,4})$. З урахуванням урожайності культур для виконання планового завдання під культуру $К_1$ треба відвести 6000/20=300 га, під культура $К_2$ – 15000/30=500 га, під культуру $К_3$ – 2250/15=150 га й під культуру $К_4$ – 12500/50=250 га. Усього буде потрібно 300+500+150+250=1200 га. Загальна посівна площа також становить 300+500+400=1200 га.

Умови повного використання наявних посівних площ на всіх ділянках занесемо в таблицю.

Площа ділянки $У_i$	Площа, займана під культуру $К_j$			
	$К_1$ (300)	$К_2$ (500)	$К_3$ 9150)	$К_4$ (250)
$У_1$ (300)	20 x_{11}	50 x_{12}	24 x_{13}	10 x_{14}
$У_2$ (500)	25 x_{21}	40 x_{22}	10 x_{23}	20 x_{24}
$У_3$ (400)	30 x_{31}	15 x_{32}	20 x_{33}	15 x_{34}

Отримаємо обмеження з використання посівних площ:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=300$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=500$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=400$$

і умови повної зайнятості площ відповідними культурами

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=300$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=500$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=150$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=250,$$

умови додатності змінних

$$x_{ij} \geq 0, (i=\overline{1,3}; j=\overline{1,4}).$$

Цільова функція задачі має вигляд

$$L = 20x_{11}+50x_{12}+24x_{13}+10x_{14}+25x_{21}+40x_{22}+$$

$$+10x_{23}+20x_{24}+30x_{31}+15x_{32}+20x_{33}+15x_{34} \rightarrow \max.$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження розв'язання системи лінійних рівнянь, яке доставляє максимум цільової функції.

Аналізуючи систему рівнянь, зазначимо, що вона має всі особливості транспортної задачі. Отже її можна вирішити, наприклад, методом потенціалів. Оскільки в розглянутому випадку має місце задача максимізації, ознакою оптимального плану буде відсутність у заключній таблиці вільних кліток з додатними оцінками.

Побудуємо початковий опорний план методом найбільшого елемента

Площа ділянки $У_i$	Площа, займана під культуру $К_j$			
	$К_1$ (300)	$К_2$ (500)	$К_3$ (150)	$К_4$ (250)
$У_1$ (300)	20	50 300	24	10
$У_2$ (500)	25 300 –	40 200	10	20 +
$У_3$ (400)	30 0 +	15	20 150	15 250 --

Для дослідження плану на оптимальність треба знайти оцінки вільних кліток. Для цього слід знайти потенціали U_i і V_j, які визначаються в результаті вирішення системи рівнянь, складених по зайнятих клітках:

$$U_1 + V_2 = 50$$

$$U_2 + V_1 = 25$$

$$U_2 + V_2 = 40$$

$$U_3 + V_1 = 30$$

$$U_3 + V_3 = 20$$

$$U_3 + V_4 = 15$$

Отримаємо:

	$V_1=30$
$U_1=5$	$V_2=45$
$U_2=-5$	$V_3=20$
$U_3=0$	$V_4=15$

Тепер знайдемо оцінки вільних кліток:

$\Delta_{11} = з_{11} – (U_1 + V_1) = 20\text{-}(5+30) = -15$

$\Delta_{13} = з_{13} – (U_1 + V_3) = 24\text{-}(5+20) = -1$

$\Delta_{14} = з_{14} – (U_1 + V_4) = 10\text{-}(5+15) = -10$

$\Delta_{23} = з_{23} – (U_2 + V_3) = 10\text{-}(-5+20) = -5$

$\Delta_{24} = з_{24} – (U_2 + V_4) = 20\text{-}(-5+15) = 10$

$\Delta_{32} = з_{32} – (U_3 + V_2) = 15\text{-}(0+45) = -30.$

Оскільки серед оцінок є додатна ($\Delta_{24} = 10$), план не оптимальний і його можна поліпшити, займаючи клітку ($У_2$,$К_4$). Щоб визначити, яку площу x_{24} треба відвести в новому опорному плані на ділянці $У_2$ під культуру $К_4$, побудуємо замкнутий контур для клітки ($У_2$,$К_4$) і визначимо $\lambda=\min(x_{ij})=\min(300, 250)=250$.

Додаючи λ в «додатних» клітках і віднімаючи у «від'ємних», отримуємо новий опорний план:

Площа ділянки $У_i$	Площа, займана під культуру $К_j$			
	$К_1$ (300)	$К_2$ (500)	$К_3$ (150)	$К_4$ (250)
$У_1$ (300)	20	50 300	24	10
$У_2$ (500)	25 50	40 200	10	20 250
$У_3$ (400)	30 250	15	20 150	15

Перевіримо план на оптимальність. Потенціали зайнятих кліток:

$U_1 + V_2 = 50$

$U_2 + V_1 = 25$

$U_2 + V_2 = 40$

$U_2 + V_4 = 20$

$U_3 + V_1 = 30$

$U_3 + V_3 = 20$

Звідки отримаємо:

$$V_1=25$$

$$U_1=10 \qquad V_2=40$$

$$U_2=0 \qquad V_3=15$$

$$U_3=5 \qquad V_4=20.$$

Визначимо оцінки вільних кліток:

$$\Delta_{11} = з_{11} - (U_1 + V_1) = 20\text{-}(10+25) = -15$$

$$\Delta_{13} = з_{13} - (U_1 + V_3) = 24\text{-}(10+15) = -1$$

$$\Delta_{14} = з_{14} - (U_1 + V_4) = 10\text{-}(10+20) = -20$$

$$\Delta_{23} = з_{23} - (U_2 + V_3) = 10\text{-}(0+15) = -5$$

$$\Delta_{32} = з_{32} - (U_3 + V_2) = 15\text{-}(5+40) = -30$$

$$\Delta_{34} = з_{34} - (U_3 + V_4) = 15\text{-}(5+20) = -10.$$

Оцінки всіх вільних кліток від'ємні, отже отриманий план оптимальний. Розмір прибутку при реалізації оптимального плану посіву складе

L = 50*30*300+25*20*50+40*30*200+20*50*250+30*20*250+20*15*150 = =1160000грн.

Щоб визначити оптимальний план посіву без використання ділянки $У_1$ під культуру $К_2$, звільнимо клітку ($У_1$, $К_2$). Для цього умовно занизимо показник критерію оптимальності в цій клітці, наприклад, до значення мінус 100 (від'ємний прибуток), щоб цю клітку займати було невигідно. Замість культури $К_2$ на ділянці $У_1$ розмістимо культури $К_3$ і $К_4$, а під $К_2$ відведемо ділянку $У_2$, а на ділянці $У_3$ залишаться культури $К_1$ і $К_3$.

Площа ділянки $У_i$	Площа, займана під культуру $К_j$			
	$К_1$ (300)	$К_2$ (500)	$К_3$ (150)	$К_4$ (250)
$У_1$ (300)	20	-100	24 50 +	10 250 –
$У_2$ (500)	25	40 500	10	20
$У_3$ (400)	30 300	15 0	20 100 --	15 +

Перевіримо оптимальність отриманого плану. Потенціали зайнятих кліток:

$$U_1 + V_3 = 24$$

$$U_1 + V_4 = 10$$

$$U_2 + V_2 = 40$$

$$U_3 + V_1 = 30$$

$$U_3 + V_3 = 20$$

$$U_3 + V_2 = 15.$$

Звідки отримаємо:

$$V_1 = 30$$

$$U_1 = 4 \qquad V_2 = 15$$

$$U_2 = 25 \qquad V_3 = 20$$

$$U_3 = 0 \qquad V_4 = 6.$$

Визначимо оцінки вільних кліток

$$\Delta_{11} = з_{11} – (U_1 + V_1) = 20\text{-}(4+30) = -14$$

$$\Delta_{12} = з_{12} – (U_1 + V_2) = -100\text{-}(4+25) = -129$$

$$\Delta_{21} = з_{21} – (U_2 + V_1) = 25\text{-}(25+30) = -30$$

$$\Delta_{23} = з_{23} – (U_2 + V_3) = 10\text{-}(25+20) = -35$$

$$\Delta_{24} = з_{24} – (U_2 + V_4) = 20\text{-}(25+6) = -11$$

$$\Delta_{34} = з_{34} – (U_3 + V_4) = 15\text{-}(0+6) = 9.$$

План не оптимальний, оскільки оцінка вільної клітки ($У_3$, $К_4$) додатна Δ_{34}= 9.

Поліпшимо його, помістивши в клітку ($У_3$, $К_4$) ненульову компоненту і визначимо λ=min(x_{ij})=min(100, 250)=100. Отримаємо новий план і визначимо його оптимальність.

Площа ділянки $У_i$	Площа, займана під культуру $К_j$			
	$К_1$ (300)	$К_2$ (500)	$К_3$ (150)	$К_4$ (250)
$У_1$ (300)	20	-100	24 150+	10 150-
$У_2$ (500)	25	40 500	10	20
$У_3$ (400)	30 300	15 0	20	15 100

Потенціали зайнятих кліток:

$$U_1 + V_3 = 24$$

$$U_1 + V_4 = 10$$

$$U_2 + V_2 = 40$$

$$U_3 + V_1 = 30$$

$$U_3 + V_2 = 15$$

$$U_3 + V_4 = 15.$$

Звідки отримаємо:

$$V_1 = 25$$

$$U_1 = 0 \qquad V_2 = 10$$

$$U_2 = 30 \qquad V_3 = 24$$

$$U_3 = 5 \qquad V_4 = 10.$$

Визначимо оцінки вільних кліток:

$$\Delta_{11} = з_{11} - (U_1 + V_1) = 20-(0+25) = -5$$

$$\Delta_{12} = з_{12} - (U_1 + V_2) = -100-(0+10) = -110$$

$$\Delta_{21} = з_{21} - (U_2 + V_1) = 25-(30+25) = -30$$

$$\Delta_{23} = з_{23} - (U_2 + V_3) = 10-(30+24) = -44$$

$$\Delta_{24} = з_{24} - (U_2 + V_4) = 20-(30+10) = -20$$

$$\Delta_{33} = з_{33} - (U_3 + V_3) = 20-(5+24) = -9.$$

Оскільки всі оцінки вільних кліток від’ємні, план є оптимальним. Відповідно до цього плану на ділянці $У_1$ треба 150 га відвести під культуру $К_3$ і

150 га під культуру $К_4$; ділянка $У_2$ повністю зайнята культурою $К_2$, а на ділянці $У_3$ на 300 га розмістити культуру $К_1$ і на 100 га культуру $К_4$. При цьому максимальний прибуток становитиме

L = 24*15*150+10*50*150+40*30*500+30*20*300+15*50*100 = =984000грн.

Додаткове обмеження на посів культури $К_2$ скоротило прибуток на

1160000-984000 = 176000 грн.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 7. На ділянках $В_1$, $В_2$, $В_3$ і $В_4$ при спорудженні метрополітену необхідно виконати грабарства в обсягах відповідно 5, 8, 10 і 2 тис. $м^3$ з використанням взаємозамінних механізмів $М_1$, $М_2$ і $М_3$. Ресурси часу роботи механізмів відповідно дорівнюють 170, 210 і 120 годин, а їхня продуктивність залежно від гірничо-геологічних умов на ділянках і конструкції механізмів виражається величинами 50, 35 і 20 $м^3$/год відповідно. Собівартість робіт у грош. од. /$м^3$ механізмів на ділянках наведена в матриці

$$\begin{bmatrix} 1{,}8 & 0{,}7 & 2{,}1 & 1{,}9 \\ 0{,}8 & 1{,}1 & 2{,}3 & 0{,}7 \\ 1{,}5 & 2{,}8 & 0{,}9 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Скласти економіко-математичну модель задачі, що дозволяє знайти план розподілу механізмів по ділянках робіт, при якому загальна вартість робіт буде найменшою. Методом потенціалів знайти такий розподіл механізмів по ділянках, при якому сумарна вартість виконаних робіт буде мінімальною. Знайти оптимальний розподіл механізмів по дільницях робіт при додатковій умові, що на пусковій ділянці $В_3$ грабарства повинні бути виконані в повному обсязі. Встановити, наскільки зміниться вартість робіт при виконанні цієї вимоги.

Тема 6. ЦІЛОЧИСЛОВІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ І АНАЛІЗУ (8 годин).

Область використання цілочислових задач ЛП у плануванні й керуванні виробництвом.

Математична постановка цілочислових задач ЛП.

Геометрична інтерпретація рішень на площині.

Методи розв'язання цілочислових задач ЛП.

Література: [1] с. 152-171;[2] с. 175-186; [4] с. 397-417, 422-428, 432-437.

Контрольні запитання

1. Яка задача математичного програмування називається цілочисловою?
2. Приклади задач цілочислового програмування.
3 Методи вирішення задач цілочислового програмування.
4. Поясніть зміст поняття «правильне відсікання».
5. Метод Гоморі.
6. Метод гілок і границь.

Приклад 6. На придбання обладнання для нової виробничої ділянки виділено 15 грош. од. Підприємство може замовити машини типу А вартістю 3 грош. од., що випускають 1 од. продукції за зміну; і машини типу В вартістю 2 грош. од., що забезпечують випуск 2 од. продукції за зміну. Причому число придбаних машин В не повинне перевищувати 5 штук. Потрібно скласти економіко-математичну модель, користуючись якою, можна знайти план придбання машин, що враховує можливості підприємства й забезпечує найвищу продуктивність нової ділянки. Користуючись одним з методів цілочислового програмування, знайти оптимальний план придбання обладнання.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі. Припустимо, що підприємство придбає x_1 машин А и x_2 машин В. Тоді змінні x_1 і x_2 повинні задовольняти наступним нерівностям:

$$3x_1+2x_2\leq 15$$

$$x_2\leq 5.$$

Якщо підприємство придбає зазначену кількість обладнання, то продуктивність нової ділянки складе:

$$L= x_1+2x_2 \to \max.$$

За своїм економічним змістом змінні x_1 і x_2 можуть приймати тільки цілі невід’ємні значення, тобто

$$x_1,\ x_2 \geq 0,$$

$$x_1,\ x_2 – \text{цілі.}$$

Таким чином, математична модель задачі матиме вигляд:

знайти таке рішення $x=(x_1, x_2)$, що перетворює в максимум цільову функцію

$$L= x_1+2x_2 \to \max$$

і задовольняє обмеженням

$$3x_1+2x_2\leq 15$$

$$208x_1+505x_2\leq 5200$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0,$$

$$x_1,\ x_2 – \text{цілі.}$$

Оскільки невідомі можуть приймати тільки цілі значення, задача є задачею цілочисельного програмування. Тому що число змінних дорівнює двом, для розв'язання задачі можна використати її геометричну інтерпретацію. Для цього побудуємо многокутник рішень.

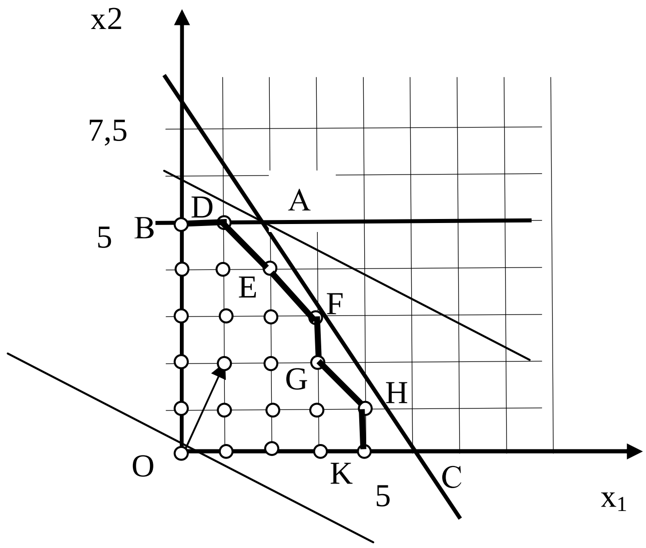

Рис. 2.

Обмеженням задачі задовольняють всі точки отриманого многокутника OBAC, а умовам цілочисельності – тільки точки, показані кружками. Щоб знайти точку, координати якої є рішенням задачі, замінимо многокутник OBAC многокутником OBDEFGHK, що містить всі припустимі точки із цілочисельними координатами й таким, що координати кожної з вершин є цілими числами. Для визначення вершини, що містить оптимальний план, побудуємо вектор c=(1;2) і пряму $x_1+2x_2=0$. Пересуваючи побудовану пряму в напрямку, зазначеному вектором, визначимо, що останньою точкою, яка з'єднує її з многокутником OBDEFGHK, є його вершина з координатами x=(1; 5).

Вирішимо задачу симплексним методом не з огляду на вимогу цілочисельності. Для цього приведемо її до канонічного вигляду:

$$L= x_1+2x_2 \to max$$

$$3x_1+2x_2 +x_3 = 15$$

$$x_2 + x_4 = 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Очевидно, що опорним планом є план

$$x = (0, 0, 15, 5).$$

Заповнимо симплекс-таблицю

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	1	2	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	15	3	2	1	0
A_4	0	5	0	1	0	1
L_j		0	0	0	0	0
Δ_j			-1	-2	0	0

Зроблена оцінка оптимальності плану показує, що план не є оптимальним. Перейдемо до нового базису. Очевидно, що вводити в базис треба в першу чергу вектор A_2, виводити з базису при цьому необхідно вектор A_4. Складемо нову симплекс-таблицю. Помножимо головний рядок нової таблиці на -2 і додаємо до рядку вектору A_3, результат записуємо в рядок вектора A_3 нової таблиці.

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	1	2	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_2	2	5	0	1	0	1
A_3	0	5	3	0	1	-2
L_j		10	0	2	0	2
Δ_j			-1	0	0	2

Новий опорний план x = (0; 5; 5; 0). Перевіривши його на оптимальність, переконуємося, що цей план також не є оптимальним, його необхідно поліпшити. Перейдемо до чергового опорного плану. Для цього введемо в базис вектор A_1, виводити з базису будемо вектор A_3. Заповнимо чергову симплекс-таблицю.

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	1	2	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	5/3	1	0	1/3	-2/3
A_2	2	5	0	1	0	1
L_j		35/3	1	2	1/3	4/3
Δ_j			0	0	1/3	4/3

Отримали новий опорний план x = (5/3; 5; 0; 0). Всі розраховані значення симплекс-різниць додатні або дорівнюють нулю, отже отриманий план є оптимальним. Але він не задовольняє умові цілочисельності змінних x_1 і x_2. Для змінної x_1, що має дробову частину, складаємо додаткове обмеження, користуючись останньою симплекс-таблицею:

$$x_1 + 1/3x_3 – 2/3x_4 \geq 5{,}3.$$

До системи обмежень додамо нерівність

$$f(1)\, x_1 + f(1/3)x_3 + f(–2/3)x_4 \geq f(5/3)$$

$$1/3x_3 + 1/3x_4 \geq 2/3.$$

Введемо невід’ємну змінну x_5 і складемо рівняння:

$$1/3x_3 +1/3x_4 -x_5 = 2/3.$$

Складемо нову симплекс-таблицю з новою умовою, доповнивши таблицю, що містить оптимальний план, новим рядком:

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	1	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	5/3	1	0	1/3	-2/3	0
A_2	2	5	0	1	0	1	0
A_5	0	-2/3	0	0	-1/3	-1/3	1
L_j		35/3	1	2	1/3	4/3	0
Δ_j			0	0	1/3	4/3	0

Слід пам'ятати, що після включення в систему обмежень додаткового рівняння, яке відповідає правильному відсіканню, завжди буде утворюватися неприпустиме базисне рішення. Для одержання припустимого базисного рішення потрібно перевести в базисні змінні одну з вільних змінних (x_3 або x_4). Нехай це буде x_3. Введемо в базис вектор A_3. Для цього помножимо рядок A_5 на (-3) і результат запишемо в рядок A_3. Головний рядок нової таблиці помножимо на (-1/3) і додамо до першого рядку попередньої таблиці. Результат запишемо в рядок A_1. Потім цей же рядок помножимо на 0,069 і додамо до другого рядку попередньої таблиці, результат запишемо в рядок A_2. Потім помножимо головний рядок на (-1/3) і додамо до другого рядку попередньої таблиці.

Базис	$C_{jбаз}$	C_j	1	2	0	0	0
		P_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	1	1	0	0	-1	1
A_2	2	5	0	1	0	1	0
A_5	0	2	0	0	1	1	-3
L_j		11	1	2	0	1	1
Δ_j			0	0	0	1	1

Отримано план x = (1; 5; 0; 0; 2). Дослідження плану на оптимальність показує, що він є оптимальним, при цьому отримали цілочисельне рішення. Таким чином, підприємству треба придбати одну машину А і п'ять машин типу В. При цьому продуктивність нової ділянки буде максимальною і складе 11 одиниць продукції.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 8. Для виконання робіт P_1, P_2 і P_3 сільськогосподарське підприємство може придбати трактори марок А і Б вартістю 4 і 3 грош. од. кожний. З використанням нової техніки необхідно виконати не менше 2020 умовн. од. роботи P_1, не менше 104 умовн. од. роботи P_2 і не менше 20 умовн. од. роботи P_3. За розглянутий проміжок часу з використанням трактора марки А можна виконати 404 умовн. од. роботи P_1, 8 умовн. од. роботи P_2 або 1 умовн. од. роботи P_3. З використанням трактора марки Б можна виконати 105 умовн. од. роботи P_1, 10 умовн. од. роботи P_2 або 4 умовн. од. роботи P_3. Скласти економіко-математичну модель, що дозволяє знайти такий варіант придбання тракторів тієї чи іншої марки, при якому будуть виконані всі необхідні роботи, а витрати на нову техніку будуть мінімальними. Користуючись одним з методів цілочисельного лінійного програмування, знайти оптимальний варіант придбання тракторів.

Задача 9. Підприємство випускає вироби А і В, при виготовленні яких використовується сировина C_1 і C_2. Відомі запаси сировини (b_1= 7, b_2 = 10), норми витрати на одиницю виробу А сировини C_1 – 1 од., сировини C_2 – 1 од. На одиницю продукції В сировини C_1 – 1 од., сировини C_2 – 2 од. Оптові ціни виробу А – 12 од., виробу В – 11 од., планова собівартість виробу А – 9 од., В – 10 од. Як тільки обсяг випуску продукції перестане відповідати оптимальним розмірам підприємства, подальше збільшення випуску x_j приводить до підвищення вартості продукції й у першому наближенні фактична собівартість c_j описується функцією

$$c_j = c_j^0 + c_j^{'} x_j ,$$

де c_j' - деяка постійна величина. При пошуку плану випуску виробів, що забезпечує підприємству найвищий прибуток в умовах порушення балансу між обсягом випуску й оптимальних розмірів підприємства цільова функція набуває вигляд

$$f = (p_1 - (c_1^0 + c_1^{'} x_1)) * x_1 + (p_2 - (c_2^0 + c_2^{'} x_2)) * x_2 ,$$

а обмеження за видами сировини

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \ . \\ &x_1 \ge 0; \ \ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Скласти економіко-математичну модель задачі. Графічним методом вирішити отриману задачу й сформулювати відповідь в економічних термінах відповідно до умов задачі.

Тема 7. ЗАДАЧІ ДРІБНОЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА АНАЛІЗУ (4 години).

Економічна сутність, постановка й моделі основних типів задач дрібнолінійного програмування (ДЛП).

Основні методи розв'язання задач ДЛП.

Аналіз оптимального плану задачі ДЛП.

Література: [1] с. 177-184;[2] с. 214-221.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу дрібнолінійного програмування.
2. Охарактеризуйте метод розв'язання задач дрібнолінійного програмування.

Тема 8. ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ОСНОВНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТА АНАЛІЗУ (8 годин).

Економічна сутність і постановка окремих типів задач нелінійного програмування (НЛП).

Класичний метод оптимізації задач НЛП на основі використання множників Лагранжа і їхня економічна інтерпретація.

Опукле програмування. Необхідна й достатня умови існування сідлової точки. Теорема Куна-Таккера. Деякі методи розв'язання задач НЛП.

Методи аналізу оптимального плану задачі НЛП.

Задачі квадратичного програмування (КП) і основні методи їх розв'язання.

Економічна постановка й математичні моделі деяких задач КП. Основні методи розв'язання задач КП.

Метод кусочно-лінійної оптимізації задачі КП.

Література: [1], с. 187-195;[2], с. 251-279; [4], с. 797-804.

Контрольні запитання

1.Запишіть загальну задачу нелінійного програмування.

2.Труднощі при розв'язанні задач нелінійного програмування.

3.Функція Лагранжа.

4.Метод Лагранжа.

5.Яка функція називається опуклою (угнутою)?

6.Сформулюйте необхідні й достатні умови існування сідлової точки для деякої диференційованої функції.

Приклад 7. Знайти умовний екстремум функції F=xy за умови

$$g(x, y) = x + y - 2 = 0 \text{ для } x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Розв'язання

Функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(y+x-2).$$

Для відшукання передбачуваного екстремуму вирішимо систему трьох рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y + x - 2 = 0.$$

Віднімаючи з першого рівняння друге, знаходимо y - x = 0. З третього рівняння визначаємо y + x = 1. Підставивши y = x в останню формулу, остаточно одержимо x*= 1 і y* = 1. З урахуванням цих результатів з першого або другого рівнянь знаходимо λ* = -1. Значення функції в точці екстремуму

F*=x*y* = 1*1 = 1.

Умови прикладу представлені на рис. 3.

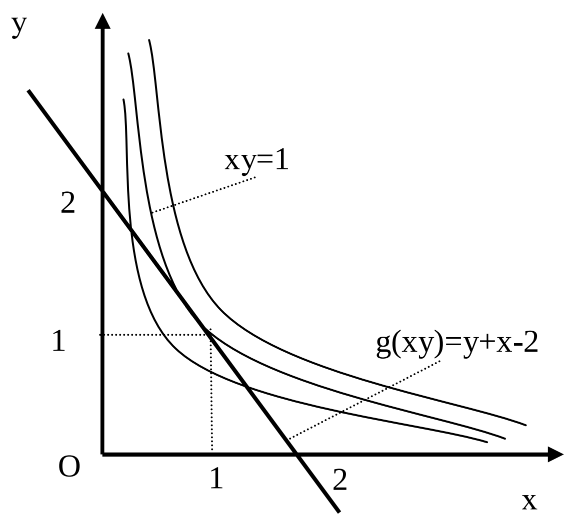

Рис. 3.

Лінія рівня, що проходить через точку передбачуваного екстремуму, описується рівнянням xy=1. Всі лінії рівня, що лежать нижче лінії xy=1, мають рівень менше 1, а що лежать вище лінії рівня xy=1, мають рівень більше 1. Це випливає з рівняння ліній рівнів y = k/x, де k - значення рівня. Ясно, що чим більше k, тим правіше проходить крива. Функція, обумовлена умовою g(xy)=y+x-2=0, є прямою лінією y=2-x. Через симетрію задачі функції xy=1 і g(xy)=y+x-2=0 торкаються один одного в точці передбачуваного екстремуму (з координатами (1,1)). Із сказаного випливає, що на прямій y=2-x значення функції u=xy менше одиниці скрізь, крім точки передбачуваного екстремуму. Таким чином, у цій точці має місце максимум.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 10. Використовуючи метод Лагранжа, відшукати умовний екстремум функції

$$F = x_1 x_2 + x_3$$

за умови

$$x_1^2 x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Задача 11. Знайти графічним методом максимум і мінімум функції:

$$F = x+2y$$

за умови

$$x^2 + y^2 \leq 4,$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Тема 9. ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (12 годин).

Економічна сутність, деякі основні типи задач і моделі динамічного програмування (ДП).

Задачі про заміну основного капіталу підприємства. Багатокроковий процес прийняття рішень.

Метод рекурентних співвідношень.

Принцип оптимальності Беллмана.

Література: [1], с. 195-209; [2], с. 292-310; [4], с. 441-465.

Контрольні запитання

1. Сформулюйте задачу динамічного програмування.
2. Методи розв'язання задач динамічного програмування.
3. Наведіть приклади реальних динамічних задач.

Приклад 8. Для ритмічної роботи підприємства необхідно систематичне поповнення запасу сировини С, що витрачається при виробництві продукції. Потреба в сировині за місяцями планового періоду відома й виражається числами 150, 50, 100 і 100 од. Поповнення запасу проводиться партіями, кратними 50 од. На початок планового періоду на складах підприємства є запас сировини обсягом в 100 од. Складські приміщення не дозволяють зберігати одночасно більше 300 од. сировини. До кінця планового періоду весь запас повинен бути витрачений, оскільки підприємство переходить на випуск нової продукції, для якої сировина С не буде потрібна.

Витрати P(x) на поповнення запасу залежать від обсягу x партії поставки й описуються функцією P(x), що задається таблично.

x	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
P(x)	0	50	48	44	40	36	32	27	24	22	21	21	20

Витрати $\varphi(\overline{m}_i)$ на зберігання сировини залежать від середнього рівня $\overline{m}_i$ запасу сировини в даному місяці, що визначається за формулою

$$\overline{m_t} = D_t/2 + j_t\,,$$

де D_t – обсяг споживання сировини в даному місяці, j_t - залишок сировини до кінця цього місяця. Витрати на зберігання описуються функцією $\varphi(\overline{m}_i)$, що задається таблично.

$\overline{m}_i$	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325
$\varphi(\overline{m}_i)$	0	3	8	15	30	36	41	46	50	51	52	53	54	56

Потрібно так організувати процес поповнення й зберігання сировини на підприємстві в розглянутому плановому періоді, щоб сумарні витрати мінімізувалися при неодмінній умові безперебійного функціонування виробництва.

Розв'язання

Позначимо:

$f_t(i)$ – мінімальні сумарні витрати на поповнення і зберігання сировини за останні t місяців планового періоду при рівні запасу на початок t-го місяця в i одиниць;

x - обсяг партії поставки сировини;

d_t – обсяг споживання сировини в t-му місяці;

i_t – рівень запасу сировини на початок місяця;

j_t – залишок сировини на кінець місяця;

M - місткість складських приміщень підприємства;

Тоді рівень запасу сировини на кінець t-го місяця визначиться як

$$i_t + x - d_t$$

Функціональні рівняння Беллмана матимуть такий вигляд:

для 4-го місяця - $f_4(i) = P_4(x) + \varphi_4(d_4/2)$,

де перший доданок - витрати на поповнення запасу сировини, а другий - витрати на зберігання сировини в 4-му місяці;

для проміжного t-го місяця -

$$f_t(i) = \min\{P_t(x) + \varphi_t(d_t/2 + (i + x - d_t)) + f_{t-1}(i + x - d_{t-1})\},$$

де перший доданок – витрати в t-му місяці на поповнення запасу сировини в обсязі x_t од., другий – витрати на зберігання сировини в цьому місяці, причому середній рівень запасу становить $(d_t/2+(i+x-d_t))$ од., третій – мінімальні сумарні витрати на поповнення і зберігання сировини за попередні місяці планового періоду.

За умовою $d_1=150$, $d_2=50$, $d_3=100$ і $d_4=100$, $i_1=100$, $M=300$.

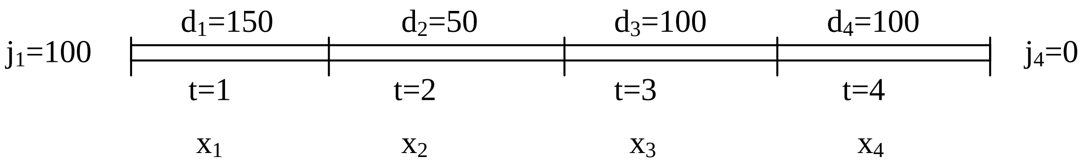

Рис. 4.

Функціональне рівняння для 4-го місяця матиме такий вигляд:

$$f_4(i) = P_4(x) + \varphi_4(100/2),$$

де рівень запасу сировини на початок 4-го місяця може становити 0, 50 або 100 од., відповідно x може приймати значення 100, 50 або 0 од. Заповнимо таблицю і визначимо сумарні мінімальні витрати на поповнення запасу і його зберігання

i	x_4(i)	f_4(i)
0	100	40+8
50	50	48+8
100	0	0+8

Очевидно, витрати останнього місяця будуть найменшими у випадку, якщо запас на початок забезпечить видаток сировини.

Проаналізуємо два останніх місяці:

$$f_3(i) = \min\{P_3(x) + \varphi_3(100/2 + (i + x - 100)) + f_4(i + x - 100)\}.$$

Рівень запасу сировини на початок 3-го (другого від кінця) місяця може становити 0, 50, 100, 150 або 200 од., а обсяг поставки сировини х відповідно 200, 150, 100, 50 або 0 од. Заповнимо таблицю. У клітки основного поля таблиці будемо вписувати значення суми трьох доданків P_3, φ_3 і f_4. Якщо на початок 3-го місяця залишок i=0, тоді:

якщо поставка x=100, то $f_3(i=0)$ = 40+8+48,

якщо поставка x=150, то $f_3(i=0)$ = 32+30+56,

якщо поставка x=200, то $f_3(i=0)$ = 24+41+8.

Мінімальна вартість дорівнює 73 при поставці x=200. Занесемо ці значення в останні стовпці.

Аналогічно заповнимо інші клітки таблиці.

x i_3	0	50	100	150	200	$x^{опт}{}_3(i)$	$f_3(i)$
0			40+8+48	32+30+56	24+41+8	200	73
50		48+8+48	40+30+56	32+41+8		150	81
100	0+8+48	48+30+56	40+41+8			0	56
150	0+30+56	48+41+8				0	86
200	0+41+8					0	49

Функціональне рівняння для 2-го місяця:

$$f_2(i) = \min\{P_2(x) + \varphi_2(50/2 + (i + x - 50)) + f_3(i + x - 50)\}$$

Рівень запасу сировини на початок 2-го (третього від кінця) місяця може становити 0, 50, 100, 150, 200 або 250 од., а обсяг поставки сировини х відповідно 250, 200, 150, 100, 50 або 0 од. Заповнимо таблицю. Якщо на початок 2-го місяця залишок i=0, тоді:

якщо поставка x=50, то $f_3(i=0)$ = 48+3+73,

якщо поставка x=100, то $f_3(i=0)$ = 40+15+81, якщо поставка x=150, то $f_3(i=0) = 32+36+56$,

якщо поставка x=200, то $f_3(i=0) = 24+46+86$,

якщо поставка x=250, то $f_3(i=0) = 21+51+49$.

Мінімальна вартість дорівнює 121 при поставці x=250. Занесемо ці значення в останні стовпці.

Аналогічно заповнимо інші клітки таблиці.

x i_2	0	50	100	150	200	250	$x^{опт}_2(i)$	$f_2(i)$
0		48+3+73	40+15+81	32+36+56	24+46+86	21+51+49	150	121
50	0+3+73	48+15+81	40+36+56	32+46+86	24+51+49		0	76
100	0+15+81	48+36+56	40+46+86	32+51+49			0	96
150	0+36+56	48+46+86	40+51+49				0	92
200	0+46+86	48+51+49					0	132
250	0+51+49						0	100

Функціональне рівняння для 1-го місяця:

$$f_1(i) = \min\{P_1(x) + \varphi_1(150/2 + (i + x - 150)) + f_2(i + x - 150)\}.$$

Рівень запасу сировини на початок 1-го (четвертого від кінця) місяця може становити за умовою задачі 100 од., а обсяг поставки сировини x відповідно 200, 150, 100, 50 од. Заповнимо таблицю. Якщо на початок 1-го місяця залишок i=100, тоді:

якщо поставка x=50, то $f_3(i=0) = 48+3+73$,

якщо поставка x=100, то $f_3(i=0) = 40+15+81$,

якщо поставка x=150, то $f_3(i=0) = 32+36+56$,

якщо поставка x=200, то $f_3(i=0) = 24+46+86$,

якщо поставка x=250, то $f_3(i=0) = 21+51+49$.

Мінімальна вартість дорівнює 121 при поставці x=250. Занесемо ці значення в останні стовпці.

Аналогічно заповнимо інші клітки таблиці.

x i_2	50	100	150	200	$x^{опт}_1(i)$	$f_1(i)$
100	48+15+121	40+36+76	32+46+96	24+51+92	100	152

Тепер можна прийняти остаточне рішення щодо організації процесу поповнення і зберігання сировини, який мінімізує витрати. З останньої таблиці видно, що мінімальна вартість витрат складе 152 од. Для її досягнення треба в першому місяці планового періоду зробити закупівлю 100 од. сировини, при цьому загальний запас сировини складе 200 од., з яких 150 од. буде витрачене на потреби виробництва. До початку другого місяця планового періоду залишиться 50 од. сировини, і цей запас повністю буде використаний у виробництві протягом другого місяця. На початку третього місяця треба зробити закупівлю 200 од. сировини. Цей запас повністю забезпечить виробництво в третьому й четвертому місяцях.

Задачі для самостійного розв'язання.

Задача 10. Підприємство розподіляє кошти на покупку п'яти типів верстатів у чотири цехи. Експлуатація k-го верстата приносить прибуток $f_k(x_k)$ цеху залежно від кількості виділених цьому цехові верстатів x_k. Функція $f_k(x_k)$ задана таблично:

x_k	$f_1(x_k)$	$f_2(x_k)$	$f_3(x_k)$	$f_4(x_k)$
1	10	12	14	12
2	15	14	16	13
3	18	16	19	16
4	20	20	22	18
5	24	22	24	22

Визначити, яку кількість верстатів треба виділити кожному цеху, щоб сумарний прибуток був максимальним.

Задача 11. В умовах попередньої задачі кількість виділених верстатів покласти рівним шести. Функція для шести верстатів задана в таблиці $f_k(x_k)$.

x_k	$f_1(x_k)$	$f_2(x_k)$	$f_3(x_k)$	$f_4(x_k)$
1	10	12	14	12
2	15	14	16	13
3	18	16	19	16
4	20	20	22	18
5	24	22	24	22
6	30	28	32	30

Тема 10. МОДЕЛІ Й МЕТОДИ СТОХАСТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (8 годин).

Слабко структуровані прикладні економічні проблеми й прийняття рішень в умовах невизначеності й ризику.

Загальна математична постановка задачі стохастичного програмування (СП).

Класифікація задач СП.

Формалізація задачі СП.

Деякі основні (прямі й непрямі) методи розв'язання задач СП. Методи імітаційного моделювання.

Математична постановка одно етапних статистичних задач СП. Стохастичні аналоги детермінованих моделей керування виробництвом. Планування обсягу реалізації при невизначеному попиті.

Прийняття рішень в умовах невизначеності й ризику.

Література: [1], с. 223-237; [4], с. 607-628.

Контрольні запитання

1. Сутність задач стохастичного програмування.
2. Яка стохастична задача називається одноетапною?
3. Яка стохастична задача називається двохетапною?
4. Методи розв'язання стохастичних задач.

Приклад 9. Фермер має змогу купити три види зерна для готування кормових сумішей. Дані про поживність зерна, його вартість і мінімальні та максимальні потреби в живильних речовинах наведені в таблиці.

Зерно	Кормових одиниць	Протеїн	Лізин	Кальцій	Ціна, грн.
Ячмінь	115	8,5	0,41	45	45
Кукурудза	133	7,3	0,21	40	40
Горох	118	19,2	1,42	0,2	50
Потреба в живильних речовинах					
максимальна	106	890	45	12	
мінімальна	95,4	801	41	9	

Потреба в живильних речовинах розподілена рівномірно. Розробити економіко-математичну модель і знайти оптимальне рішення, що забезпечує мінімальні витрати на закупівлю зерна й задовольняє мінімально припустиму потребу у всіх живильних речовинах з імовірністю 0,9.

Розв'язання

Нехай x_1, x_2, x_3 – необхідна кількість ячменя, кукурудзи й гороху відповідно. Тоді математична модель задачі буде мати вигляд

$$F(x_1,x_2,x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3 \to \min$$

при умовах

$$P\{115x_1 + 133x_2 + 118x_3 \geq a\} \geq 0{,}9,$$

$$P\{8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq b\} \geq 0{,}9,$$

$$P\{0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq c\} \geq 0{,}9,$$

$$P\{0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq d\} \geq 0{,}9,$$

де a, b, c, d - випадкові рівномірно розподілені величини.

Отриману систему імовірнісних обмежень запишемо у вигляді детермінованих еквівалентів:

$$115x_1 + 133x_2 + 118x_3 \geq a_1,$$

$$8{,}5x_1 + 7{,}3x_2 + 19{,}2x_3 \geq b_1,$$

$$0{,}41x_1 + 0{,}21x_2 + 1{,}42x_3 \geq c_1,$$

$$0{,}2x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}2x_3 \geq d_1,$$

де a_1, b_1, c_1, d_1 – значення випадкових величин, що задовольняють умовам

$$P\{a \geq a_1\} \geq 0{,}9,$$

$$P\{b \geq b_1\} \geq 0{,}9,$$

$$P\{c \geq c_1\} \geq 0{,}9,$$

$$P\{d \geq d_1\} \geq 0{,}9.$$

Визначимо параметри a_1, b_1, c_1, d_1 . З теорії ймовірностей відомо, що

$$\frac{1}{106 - 95{,}4} \int_{95{,}4}^{a_1} d\varphi = 0{,}9 \,.$$

Звідси дістанемо $\frac{1}{10,6}\left(\varphi\left|\frac{a_1}{95,4}\right.\right)=0,9$ або $\frac{1}{10,6}(a_1-95,4)=0,9$; a_1 = 104,94.

Визначимо інші параметри: b_1=881,1; c_1 = 44,6; d_1 = 11,7.

Запишемо детермінований варіант економіко-математичної моделі

$$F(x_1,x_2,x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3 \to \min$$

при умовах

$$115x_1 + 133x_2 + 118x_3 \geq 104,94,$$

$$8,5x_1 + 7,3x_2 + 19,2x_3 \geq 881,1,$$

$$0,41x_1 + 0,21x_2 + 1,42x_3 \geq 44,6,$$

$$0,2x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_3 \geq 11,7,$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Вирішивши цю задачу симплексним методом, дістанемо x_1=3,094, x_2=3,559, x_3=1,866. Оптимальний видаток складе 3749 грн.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 12. Фірма виробляє товар, попит на який заздалегідь не відомий. Навіть при відомих цінах і витратах на виробництво очевидний ризик не-отримання прибутку, якщо обсяг виробництва менше попиту, або невиправ-даних витрат, якщо обсяг виробництва більше попиту.

Нехай z - випадковий попит на товар, c - ціна реалізованого товару, g - питомі витрати на виробництво, x - шуканий обсяг виробництва продукції. Сформулювати модель балансу попиту і пропозиції з урахуванням можливо-сті часткової адаптації виробництва до попиту.

Тема 11. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР (12 годин).

Основні поняття теорії ігор.

Матричні ігри двох гравців.

Платіжна матриця.

Гра в чистих стратегіях.

Мінімаксні стратегії.

Сідлова точка.

Змішані стратегії.

Основна теорема теорії ігор.

Зведення задачі гри двох гравців до задачі лінійного програмування. Література: [1], с. 213-221; [2], с. 239-249; [4], с. 549-557, 575-578, 580-587.

Контрольні запитання

1. Що називається конфліктною ситуацією?
2. Що таке гра?
3. Що таке хід гри?
4. Дайте визначення платіжної матриці.
5. Сформулюйте принцип „мінімакса”.
6. Дайте визначення максимінної і мінімаксної стратегій.
7. Яка гра називається кінченою, парною?
8. Які властивості мають оптимальні стратегії гравців?
9. Дайте визначення понять виграш, ціна гри, нижня й верхня ціни гри.
10. Сформулюйте основну теорему теорії ігор.
11. Зведення гри до задачі лінійного програмування.

Приклад 10. Дві компанії A і B продають два види товарів. Компанія A рекламує продукцію на радіо (A_1), телебаченні (A_2) і в газетах (A_3). Компанія B, на додаток до використання радіо (B_1), телебачення (B_2) і газет (B_3), розсилає також брошури поштою (B_4). Залежно від уміння й інтенсивності проведення рекламної кампанії, кожна з компаній може залучити на свою сторону частину клієнтів конкуруючої компанії.

Наведена нижче матриця характеризує відсоток клієнтів, притягнутих або загублених компанією А.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Мінімуми рядків
A_1	8	-2	9	-3	-3
A_2	6	5	6	8	5
A_3	-2	4	-9	5	-9
Максимуми стовпців	8	5	9	8	

Розв'язання

Вирішення гри засноване на забезпеченні найкращого результату з найгірших кожного гравця. Якщо компанія А вибирає стратегію A_1, то незалежно від того, що робить компанія В, найгіршим результатом є втрата компанією А 3% ринку на користь компанії В. Це визначається мінімумом елементів першого рядка матриці платежів. Аналогічно при виборі стратегії A_2 найгіршим результатом для компанії А є збільшення ринку на 5 % за рахунок компанії В. Нарешті, найгіршим результатом при виборі стратегії A_3 є втрата компанією А 9% ринку на користь компанії В. Ці результати містяться в стовпці «Мінімуми рядків». Щоб досягти найкращого результату з найгірших, компанія А вибирає стратегію A_2, тому що вона відповідає найбільшому елементові стовпця «Мінімуми рядків».

Розглянемо тепер стратегії компанії В. Оскільки елементи матриці є платежами компанії А, критерій найкращого результату з найгірших для компанії В відповідає вибору мінімаксного значення. У результаті доходимо висновку, що вибором компанії В є стратегія B_2.

Оптимальним рішенням у грі є вибір стратегій A_2 і B_2, тобто обом компаніям треба проводити рекламу на телебаченні. При цьому виграш буде на користь компанії А, тому що її ринок збільшиться на 5 %. У цьому разі говорять, що ціна гри дорівнює 5% і що компанії А і В використовують стратегії, що відповідають сідлової точці.

Рішення, що відповідає сідлової точці, гарантує, що ні однієї компанії немає рації намагатися вибрати іншу стратегію. Дійсно, якщо компанія В переходить до іншої стратегії (B_1, B_3 або B_4), то компанія А може зберегти свій вибір стратегії A_2, що приведе до більшої втрати ринку компанією В (6 або 8 %). За тими ж причинами компанії А немає резону використовувати іншу стратегію, тому що коли вона візьме, наприклад, стратегію A_3, то компанія В може використати свою стратегію B_3 і збільшити свій ринок на 9 %. Аналогічні висновки мають місце, якщо компанія А буде використовувати стратегію A_1.

Оптимальне рішення гри, що відповідає сідлової точці, не обов'язково повинне характеризуватися чистими стратегіями. Замість цього оптимальне рішення може вимагати змішування випадковим чином двох або більше стратегій.

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 13. Визначіть рішення, обумовлене сідловою точкою, що відповідає чистій стратегії, й ціну гри для наступних ігор, у яких платежі задані для гравця А.

а)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	2	8
A_2	8	9	4	5
A_3	7	5	3	5

б)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	-4	-5	6
A_2	-3	-4	-9	-2
A_3	6	7	-8	-9
A_4	7	3	-9	5

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування. - К.: КНЕУ, 2001.

2. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. А., Волощенко А. В. Математическое программирование. - М.:Высш.школа,1980. - 240с.

3. Акулич И. Л. Математическое програмирование в примерах и задачах.- М.: Высш. школа,1986. – 244с.

4. Таха Х. А. Введение в исследование операций. - М.: Изд.дом «Вильямс», 2005.

5. Исследование операций в экономике: Уч. пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман./ Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2003. - 407 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки до самостійного вивчення курсу «Математичне програмування» (для студентів 2 і 3 курсів спеціальностей 7.050107 „Економіка підприємства", 7.050106 „Облік і аудит" ФПО та ЗН)

Укладачі: ст.викл. Воронкова Тетяна Борисівна,
доц. Охріменко Вячеслав Миколайович,
ас. Воронков Олексій Олександрович.

Відповідальний за випуск: А.І. Кузнецов

Редактор : М.З.Аляб'єв

План 2006, поз.228

Підп. до друку 23.10.06 . Формат 60 x 84 1/16. Папір офісний.
Друк на ризографі. Обл.-вид арк. 3,6 Умов.-друк.арк. 3,2
Тираж 300 прим. Зам.№

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції,12
Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ
61002, Харків, вул. Революції, 12